Ogólna teoria miary
Lista 5 (miary zewnętrzne)

Zad 1. Sprawdzić, która z funkcji zbioru $\mu^* : 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, jest miarą zewnętrzną:

a) X jest dowolny, $\mu^*(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & x_0 \notin A \end{cases}$, gdzie $x_0 \in X$ jest ustalonym punktem,

b) X jest dowolny, $\mu^*(A) = 1$ dla $A \subset X$, gdy $A \neq$ i $\mu^*(\emptyset) = 0$,

c) $X = \{x, y\}$ i $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(\{x\}) = \mu^*(\{y\}) = 10$, $\mu^*(X) = 1$,

d) X jest zbiorem stu punktów ułożonych w macierz kwadratową o 10 wierszach i 10 kolumnach, $\mu^*(A)$ jest ilością kolumn, które zawierają conajmniej jeden punkt z A,

e) $X = \mathbb{N}$ i $\mu^*(A) = \frac{\sup A + \inf A}{2}$, gdzie przyjmujemy $\sup \emptyset = \inf \emptyset = 0$,

f) $X = \mathbb{N}$ i $\mu^*(A) = \frac{\sup A - \inf A}{2}$, gdzie przyjmujemy $\sup \emptyset = \inf \emptyset = 0$,

g) $X = \mathbb{N}$ i $\mu^*(A) = |A|$.

Dla miar zewnętrznych wyznaczyć wszystkie zbiory μ^*-mierzalne.

Zad 2. Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na 2^X i niech $A, B \subset X$. Pokazać, że

a) jeśli A lub B jest μ^*-mierzalny to

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B),$$

b) jeśli $\mu^*(B) = 0$, to $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A)$.

Zad 3. Rozważmy na $2^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ funkcję $\mu^*(A) = \sup A$, gdzie przyjmujemy $\sup \emptyset = \inf \emptyset = 0$. Czy μ^* jst miarą zewnętrzną i czy zbiory $\{0\}$ i $\{1\}$ są mierzalne względem μ^*?

Zad 4. Niech $X = \{1, 2, 3\}$, $S = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \emptyset\}$. Rozważmy funkcję zbioru $\mu : S \to \mathbb{R}_+$

$$\mu(\{1\}) = 2, \qquad \mu(\{2, 3\}) = 4, \qquad \mu(\{1, 3\}) = 3, \qquad \mu(\emptyset) = 0.$$

Sprawdzić, że wzór $\mu^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \;\; A_i \in S\}$ zadaje na 2^X miarę zewnętrzną i wyznaczyć wszystkie zbiory μ^*-mierzalne.

Zad 5. Dla każdego $\varepsilon > 0$ znaleźć otwarty i gęsty podzbiór $\mathbb{R}$ o mierze Lebesgue'a mniejszej niż ε.

Zad 6. Wykazać, że miara Lebesgue'a następujących podzbiorów $\mathbb{R}^2$ wynosi zero:

$$A = \{(x, y) : x - y \in \mathbb{Q}\}, \qquad B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2, \, r \in \mathbb{Q}\},$$

$$C = \{(x, y) : y = f(x), \;\; x \in [0, 1]\}, \text{ gdzie } f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ jest funkcją ciągłą.}$$

Zad 7. Pokazać, że w każdej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$ istnieje nieprzeliczalny zbiór miary zero.